Лекция 8
Дискретті кездейсоқ шаманың сандық сипаттамалары
Математиалық күтім

Бұл параграфта біз аса маңызды ұғым- (қарапайым) кездейсоқ шаманың математиалық күтімі ұғымын енгіземіз және оның кейбір маңызды қасиеттеріне тоқталамыз. Жалпы жағдайда кездейсоқ шаманың математикалық күтімі деп осы кездейсоқ шамадан (өлшенетін функциядан) ықтималдықтық өлшем бойынша алынған Лебег интегралын айтатынын (оны біз оқу құралының келесі 2-бөлімінде толық қарастырамыз) оқырманға ескерте кетелік.

Кездейсоқ шаманың математикалық күтімі. Қасиеттері.

Айталық $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ - ақырлы ықтималдық кеңістігі болсын, $\xi: \Omega \to X = \{x_1, x_2, \ldots x_к\}$ қандай да бір қарапайым кездейсоқ шама болсын. Егер $A_i = \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x_i\}$ $(i = 1,2,\ldots k)$ белгілеулерін енгізсек, онда әрине $\xi = \xi(\omega)$ кездейсоқ шамасын мына түрде жазуға болады.

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{k} x_i I_{A_i}(\omega) \tag{1}$$

МұндаЄы $A_1, A_2, \ldots, A_k$ жиындары Ω – кеңістігінің б-ліктеуін құрайды $\left(A_i A_j = \varnothing \quad (i \neq j), \quad \sum_{i=1}^{k} A_i = \Omega \right)$. $p_i = P\{\omega: \xi(\omega) = x_i\} = P(A_i)$ белгілеуін енгізелік. Егер ξ кездейсоқ шамасының мәндерін "n тәуелсіз тәжірибе" нәтижесінде бақыладық деп, ал бұл кезде x_i мәні сәйкес n_i рет $\left(n_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k} n_i = n \right)$ пайда болсын деп есептелік. Онда кездейсоқ шаманың n тәжірибе нәтижесінде есептелінген орта мәні шамамен мынаған тең болуы керектігі түсінікті:

$$\frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{n} = \frac{n_1}{n} x_1 + \frac{n_2}{n} x_2 + \ldots + \frac{n_k}{n} x_k$$

Егер тәжірибе саны жеткілікті үлкен болса $(n >> 1)$, онда салыстырмалы жиіліктер $\frac{n_j}{n}$ жиіліктің орнықтылық қасиеті бойынша сәйкес ықтималдыққа өте жақын: $P(A_j) = p_j = P\{\xi = x_j\} \approx \frac{n_j}{n}$. Онда ізделінді орта мән шамамен мынаған тең

$$\frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{n} \approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k =$$
$$= x_1 \mathrm{P}(A_1) + x_2 \mathrm{P}(A_2) + x_k \mathrm{P}(A_k)$$

АйтылЄандар бізге кездейсоқ шаманың орта мәнінің мынандай анықтамасын беруімізге негіз болады.

Анықтама. $\xi(\omega)=\sum\limits_{i=1}^{k} x_i I_{A_i}(\omega)$ (қарапайым) кездейсоқ шамасының *математикалық күтімі* немесе *орта мәні* деп (оны $M\xi$ арқылы белгілейміз) мына санды айтамыз:

$$M\xi=\sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i) \qquad \textbf{(2)}$$

Сонымен, қарапайым кездейсоқ шаманың математикалық күтімі әрқашан бар болады және ол ақырлы сан болады. Екіншіден $A_i=\{\omega:\xi(\omega)=x_i\}$ болғандықтан $P(A_i)=P_\xi(x_i)$, ендеше (2) анықтаманы басқаша былай жаза аламыз:

$$M\xi=\sum_{i=1}^{k} x_i P_\xi(x_i)=\sum_{i=1}^{k} x_i P\{\xi=x_i\} \qquad (2')$$

Ескерту. Егер ξ кездейсоқ шамасының қабылдайтын мәндер жиыны саналымды жиын болса, яғни

$$\xi(\omega)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i I_{A_i}(\omega),\ A_i=\{\omega:\xi(\omega)=x_i\},\ x_i\neq x_j\ (i\neq j)$$

түрінде жазылса, онда мұндай кездейсоқ шаманың математикалық күтімі былай анықталады:

$$M\xi=\sum_{i:x_i>0} x_i P(A_i)-\sum_{i:x_i<0}(-x_i)P(A_i) \qquad (3)$$

Біз (3) қатынастың оң жағындағы екі қатардың ең болмағанда біреуі жинақталатын болса, онда ξ дискретті кездейсоқ шамасының *математикалық күтімі бар болады* немесе *математикалық күтімі анықталЄан* дейміз. Бұдан, егер М ξ бар болса, онда екі қатардың екеуі де жинақталған жағдайда $M\xi<\infty$, қалған жағдайларда $M\xi=+\infty$ (бірінші қатар жинақталмаса) немесе $M\xi=-\infty$ (екінші қатар жинақталмаса) болатындығы шығады. Егер екі қатардың екеуі де жинақталмаса *математикалық күтім анықталмаЄан* дейміз. Анықтамадан, егер қатар $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \mathrm{P}(A_i)$ абсолютті жинақталса, онда математикалық күтім ақырлы болатыны ($M\xi<\infty$) және де

$$M\xi=\sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathrm{P}(A_i) \qquad (3')$$

формуласымен есептелетіндігі шығады. Жеке жағдайда, егер ξ тек теріс емес немесе тек теріс мәндер ғана қабылдайтын дискретті кездейсоқ шама болса, онда $M\xi$ әруақытта (3’) формуламен есептелетіндігі және не $M\xi<\infty$ ($M\xi$ арқылы) не $M\xi = +\infty$ немесе $\mathrm{M}\,\xi = -\infty$ болатындығы, яғни мұндай кездейсоқ шаманың математикалық күтімі әруақытта бар болатындығы шығады.

Бұл оқу құралында біз математикалық күтімді негізінен тек қарапайым кездейсоқ шамалар үшін қарастырып, зерттейміз, қасиеттерін де тек қарапайым кездейсоқ шамалар үшін дәлелдейміз; ал басқа (мәселен, ескертуде айтылЄан) кездейсоқ шамаларды қарастыра қалған жағдайда ол туралы арнайы ескертіп отыратын боламыз.

Кездейсоқ шаманың үлестіру функциясының ($F_\xi = F_\xi(x)$) анықтамасын еске алсақ және

$$\Delta F_\xi(x) = F_\xi(x) - F_\xi(x-0)$$

белгілеуін енгізсек, онда

$$\mathrm{P}_\xi(x_i) = \mathrm{P}\{\xi = x_i\} = \mathrm{P}\{\xi \le x_i\} - \mathrm{P}\{\xi < x_i\} = F_\xi(x_i) - F_\xi(x_i - 0) = \Delta F_\xi(x_i)$$

сондықтан

$$M\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i \, \Delta F_\xi(x_i)$$

Бір кездейсоқ шаманы әртүрлі түрде жазуға болатындықтан, егер ξ кездейсоқ шамасы (1)-ден басқа түрде жазылса оның математикалық күтімін қалай есептеу керек және ол мән (1) формуламен анықталған шамаға тең бола ма деген заңды сұрақ туады. Мәселен, ξ кездейсоқ шамасы басқаша түрде былайынша жазылған болсын:

$$\xi(\omega) = \sum_{j=1}^{l} x'_j I_{B_j}(\omega),$$

мұндағы $B_i B_j = \varnothing\ (i \ne j), \sum_{j=1}^{l} B_j = \Omega,$ бірақ x'_j – тердің ішінде кейбіреулері бірдей болуы мұмкін. Бұл жағдайда $M\xi$ – ді $\sum_{j=1}^{l} x'_j P(B_j)$ түрінде бірден есептеуге болады екен, яғни ξ – ді x_i – лері әртүрлі болатын (1) түрге келтіріп жазудың қажеті жоқ екен. Шындығында да бұл жағдайда:

$$\sum_{j=1}^{l} x'_j P(B_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j:x'_j = x_i} x'_j P(B_j) = \sum_{i=1}^{k} x_i \sum_{j:x'_j = x_i} P(B_j) = \sum_{j=1}^{k} x_i P(A_i)$$

Соңғы формула математикалық күтімнің анықтамасының *қисындылығын (корректілігін),* яғни математикалық күтімнің анықтамасының қарапайым кездейсоқ шаманың қандай түрде жазылғанына тәуелсіздігін көрсетеді.
Енді матматикалық күтімді анықтама бойынша есептеудің бірнеше мысалын келтірелік.

Мысалдар.

1) ξ – бернуллилік кездейсоқ шама болсын, яғни $\mathrm{P}\{\xi = 1\} = p$, $\mathrm{P}\{\xi = 0\} = q = 1 - p$ болатын кездейсоқ шама болсын. Онда (2) формула бойынша

$$M\xi = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p.$$

2) $\xi = I_A(\omega),\ A \in \mathrm{F}$ болсын. Онда $\xi = 1 \cdot I_A(\omega) + 0 \cdot I_{\bar{A}}(\omega)$ болғандықтан

$$M\xi = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(\bar{A}) = P(A).$$

Сонымен

$$M\, I_A(\omega) = P(A).$$

Жеке жағдайда, егер a тұрақты шама болса, онда $M(a) = a$ (тұрақтының математикалық күтімі оның өзіне тең)

3) $\xi \sim Bi(n,p)$, яғни ξ параметрі n және p болатын биномдық кездейсоқ шама болсын. Онда

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0,1,\ldots,n,$$

болғандықтан

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} =$$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k q^{n-1-k} = np(p+q)^{n-1} = np$$

Сонымен $\xi \sim Bi(n,p)$ болса, онда $M\xi = np$.

4) Ойын сүйегі 60 рет лақтырылған болса, “1” ұпай орташа алғанда шамамен қанша рет түседі деген сұраққа жауап беріп көрелік. Жоғарыдағы 3-мысалда $p = \frac{1}{6}$, $n = 60$, сондықтан “1” ұпай түсуінің орта мәні $np = 60 \cdot \frac{1}{6} = 10$.

5) $\xi \sim \Pi(\lambda)$, яғни ξ – параметрі λ – ға тең пуассондық кездейсоқ шама. Онда (3) формула бойынша

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

Сонымен, $\xi \sim \Pi(\lambda)$ болса, онда $M\xi = \lambda$.

6) ξ параметрі p – ға тең геометриялық кездейсоқ шама болсын. Онда

$$\mathrm{M}\,\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)'_q =$$

$$= p\left(\frac{q}{1-q}\right)'_q = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

Біз мұнда $0 < q < 1$ болғандықтан шектеусіз геометриялық прогрессияның қосындысының формуласы бойынша $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$ және де дәрежелік қатарды жинақталу облысында мүшелеп дифференциалдауға болатындығын пайдаландық ($(\ldots)_q'$ жақша ішіндегі өрнектен q бойынша туынды алуды білдіреді).

Ескерту. Әдетте параметрі p-ға тең геометриялық кездейсоқ шама деп үлестірім заңы $P\{\eta = k\} = (1-p)^k p,\ k = 0,1,2,\ldots$ арқылы анықталған η кездейсоқ шамасын айтатынын тағы да ескерте кетелік. Мағынасы бойынша бұл кездейсоқ шама Бернуллидің тәуелсіз сынақтар тізбегіндегі бірінші табысқа дейінгі жүргізілген сынақтар санын білдіреді. Демек, біздің мысалда ξ кездейсоқ шамасы бірінші табыс пайда болған сынақтың нөмірін білдіретін кездейсоқ шама, яғни $\xi = \eta + 1$ Тікелей есептеулер $M\eta = \frac{q}{p}$ болатынын көрсетеді (дәлелдеңіз).

Енді математикалық күтімнің бірнеше маңызды қасиеттерін тұжырым ретінде дәлелделік.

Тұжырым.

1^0. *(теріс еместік қасиеті)*. Егер $\xi \geq 0$ болса, онда $M\xi \geq 0$;

2^0. Егер $\xi = I_A(\omega)$ болса, онда $M\, I_A = P(A)$; $\xi = a = const$ болса, онда $M(a) = a$;

3^0. *(сызықтық қасиеті)*. Егер a, b – тұрақты сандар болса,онда

$$M(a\xi + b\eta) = aM\xi + bM\eta \; ;$$

4^0. Егер $\xi \geq \eta$ болса, онда $M\xi \geq M\eta$.

5^0. *(мультипликативтік қасиеті)*. Егер ξ және η тәуелсіз кездейсоқ шамалар болса, онда

$$M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta\, , \tag{5}$$

6^0. Математикалық күтімді мына формуламен де есептеуге болады:

$$M\xi(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega)\, , \tag{6}$$

мұндағы $P(\omega) - \omega -$ элементар оқиғасының ықтималдығы.

7^0. Егер $\varphi(x)$ сандық функция болатын болса, онда

$$M\varphi(\xi(\omega)) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(x_i) P(A_i) = \sum_{\omega \in \Omega} \varphi(\xi(\omega)) P(\omega) = \sum_{j=1}^{l} y_j P(B_j)\ , \tag{7}$$

мұндағы

$$B_j = \{\omega : \varphi(\xi(\omega)) = y_j\} = \bigcup_{i:\varphi(x_i)=y_j} \{\omega : \xi(\omega) = x_i\} = \bigcup_{i:\varphi(x_i)=y_j} A_i\ .$$

8^0. $|M\xi| \leq M|\xi|$

Соңғы (7) формула кездейсоқ шаманың функциясының математикалық күтімін әртүрлі әдістермен- элементар оқиғалардың ықтималдықтары арқылы немесе сол берілген кездейсоқ шаманың үлестірімдері арқылы, немесе жаңа (күрделі) кездейсоқ шаманың үлестірімдері арқылы есептеуге болатындығын көрсетеді.

Қасиеттердің дәлелдеуі

2^0-қасиетті біз жоғарыда дәлелдедік.(2-мысалды қараңыз).

1^0 $\xi \geq 0$ болғандықтан $\sum_{i=1}^{k} x_i P(A_i)$ қосындысындағы барлық $x_i \geq 0$, ал ықтималдықтар $P(A_i) \geq 0$ болуы себепті, $M\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i P(A_i) \geq 0$.

3^0 Айталық

$$\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i I_{A_i}(\omega), \quad \eta = \sum_{j=1}^{l} y_j I_{B_j}(\omega) \qquad (1')$$

болсын. Онда

$$a\xi + b\eta = a \sum_{i=1}^{k} x_i I_{A_i}(\omega) + \mathrm{b} \sum_{j=1}^{l} y_j I_{B_j}(\omega) =$$

$$= \sum_{i,j} a x_i I_{A_i B_j} + \sum_{i,j} b y_j I_{A_i B_j} = \sum_{i,j} (a x_i + b y_j) I_{A_i B_j}$$

Біз бұл жерде $\sum_{i=1}^{k} I_{A_i} = \sum_{j=1}^{l} I_{B_j} = 1$, $I_{A_i} \cdot I_{B_j} = I_{A_i B_j}$ болатындығын еске алдық. Енді (2) формула бойынша:

$$M(a\xi + b\eta) = \sum_{i,j} (a x_i + b y_j) P(A_i B_j) = a \sum_{i} x_i \left(\sum_{j} \mathrm{P}(A_i B_j) \right) + b \sum_{ij} y_j \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{i} \mathrm{P}(A_i B_j) \right) = a \sum_{i} x_i \ P(A_i) + \ b \sum_{j} y_j \ P(B_j) = aM\xi + bM\eta .$$

4^0-қасиет 1^0 және 3^0 қасиеттерден шығады: $\xi \geq \eta$ болғандықтан $\xi - \eta \geq 0$. Бұдан $M(\xi - \eta) = M\xi - M\eta \geq 0$, яғни $M\xi \geq M\eta$.

Математикалық күтімнің мультипликативтік қасиетін (5^0 қасиет) дәлелдеместен бұрын ξ және η тәуелсіз кездейсоқ шамалары үшін $A_i = \{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$, $B_j = \{\omega : \eta(\omega) = y_j\}$ оқиғалары тәуелсіз оқиғалар болатындыЄын (1-параграфтың 4-пунктін қараңыз), яғни $P(A_i B_j) = P(A_i) \cdot P(B_j)$ шарты орындалатындығын ескерелік. Онда ($1'$) және математикалық күтімнің анықтамасын ((2) формула) пайдалансақ:

$$M(\xi \cdot \eta) = \sum_{i,j} x_i y_j M I_{A_i B_j} = \sum_{i,j} x_i y_j P(A_i B_j) = \sum_{i,j} x_i y_j P(A_i) P(B_j) =$$

$$= (\sum_{i} x_i \mathrm{P}(A_i)) \cdot (\sum_{i} y_j \mathrm{P}(B_j)) = \mathrm{M}\xi \cdot \mathrm{M}\eta .$$

6^0 қасиетті дәлелделік. Шындығында да бұл жағдайда

$$\sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)P(\omega)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{\omega:\xi(\omega)=x_i}\xi(\omega)P(\omega)=\sum_{i=1}^{k}x_i\sum_{\omega:\xi(\omega)=x_i}P(\omega)=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}x_iP\{\omega:\xi(\omega)=x_i\}=\sum_{i=1}^{k}x_iP(A_i)=M\xi$$

7^0 қасиеттің біріншісі математикалық күтімнің анықтамасынан және жоғарыдағы ескертуден шығады, себебі бұл жағдайда

$$\varphi(\xi(\omega))=\sum_{i=1}^{k}\varphi(x_i)I_{\{\xi(\omega)=x_i\}}$$

Ал (7) қатынастың екіншісі $M\varphi(\xi(\omega))=\sum_{\omega\in\Omega}\varphi(\xi(\omega))P(\omega)$ – бұл әзір ғана дәлелденген 6^0-қасиет. Соңғы $M\ \varphi(\xi(\omega))=\sum_i y_iP(B_i)$ мына қатынастан шығады:

$$\varphi(\xi(\omega))=\sum_i\varphi(x_i)I_{\{\xi(\omega)=x_i\}}=\sum_j\sum_{i:\varphi(x_i)=y_j}\varphi(x_i)I_{\{\xi(\omega)=x_i\}}=$$
$$=\sum_j y_j\sum_{i:\varphi(x_i)=y_j}I_{\{\xi(\omega)=x_i\}}=\sum_j y_jI_{\{\varphi(\xi)=y_j\}}$$

Сондықтан анықтама бойынша:

$$M\varphi(\xi(\omega))=\sum_j y_jP\{\varphi(\xi)=y_j\}=\sum_j y_jP(B_j)$$

8^0-қасиет. $\left|\sum_{i=1}^{k}x_ip_i\right|\le\sum_{i=1}^{k}|x_i|p_i$ теңсіздігі екені түсінікті.

▼

Ескерту. Әрине, математикалық күтімнің сызықтық және мультипликативтік қасиеттері кез келген қарапайым кездейсоқ шамалардың ақырлы санды қосындысы мен көбейтіндісі үшін де дұрыс: Егер $\xi_1,\xi_2,...,\xi_r$ кездейсоқ шамалар, $a_1,a_2,...,a_r$ тұрақты сандар болса, онда

$$M(a_1\xi_1+\ldots+a_r\xi_r)=a_1M\xi+\ldots+a_rM\xi_r \tag{8}$$

егер $\xi_1,\xi_2,...,\xi_r$ өзара тәуелсіз болса, онда

$$M(\xi_1\cdot\xi_2\cdot\ldots\cdot\xi_r)=M\xi_1\cdot M\xi_2\cdot\ldots\cdot M\xi_r \tag{9}$$

Бұлардың дәлелдеулерін r=2 болған жағдайдағыдай немесе индукция арқылы жүргізуге болады.

Математикалық күтімнің қасиеттерін пайдалану көп жағдайда оны есептеуді жеңілдетуге мүмкіндік береді.Мысалдар келтірелік.

Мысалдар.

7) 3-мысалдағы $\xi \sim Bi(n,p)$ кездейсоқ шамасының математикалық күтімін басқаша есептелік. Ол үшін биномдық кездейсоқ шаманы Бернуллилік кездейсоқ шамалардың қосындысы түрінде жазып, сосын математикалық күтімнің сызықтық қасиетін пайдаланалық :

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$$

$$\mathrm{M}\xi = \mathrm{M}\xi_1 + \mathrm{M}\xi_2 + \ldots + \mathrm{M}\xi_n = \underbrace{p + p + \ldots + p}_{n\ рет} = np$$

Біз мұнда $M\xi_i = p$ (2-мысал) екендігін пайдаландық.

8) *Кездейсоқ санды кездейсоқ шамалардың қосындысы.*

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ математикалық күтімдері бірдей $(M\xi_i = a)$ кездейсоқ шамалар болсын, ν- олардан тәуелсіз және 0,1,2...n бүтін мәндерін ғана қабылдайтын кездейсоқ шама болсын. Жаңа S_ν кездейсоқ шамасын былай анықталық :

$$S_\nu = \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\nu\ , егер\ \nu > 0\ болса \\ 0\ , \qquad\qquad егер\ \nu = 0\ \ болса \end{cases}$$

Онда MS_ν неге тең деген сұрақ қоялық. Ол үшін $\sum\limits_{k=0}^{n} I_{\{\nu=k\}} = 1$ екендігін еске алып, S_ν-ді басқаша жазалық:

$$S_\nu = S_\nu\left(\sum_{k=0}^{n} I_{\{\nu=k\}}\right) = \sum_{k=0}^{n} S_\nu I_{\{\nu=k\}} = \sum_{k=0}^{n} S_k I_{\{\nu=k\}}\ .$$

Себебі $\omega \in \{\omega : \nu(\omega) = k\}$ болатын ω-лар үшін $S_{\nu(\omega)} = S_k(\omega)$. Шарт бойынша ν және $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ өзара тәуелсіз, ендеше $I_{\{\nu=k\}}$ және $S_k = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k$ кездейсоқ шамалары да тәуелсіз кездейсоқ шамалардың функциялары ретінде өзара тәуелсіз болады. Онда алдымен математикалық күтімнің сызықтық қасиетін, сосын мультипликативтік қасиетін пайдалансақ:

$$MS_\nu = \sum_{k=0}^{n} M(S_k I_{\{\nu=k\}}) = \sum_{k=0}^{n} MS_k \cdot MI_{\{\nu=k\}} = \sum_{k=0}^{n} (M\xi_1 + \ldots + M\xi_k) \cdot P(\nu = k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} ka \cdot P\{\nu = k\} = a\sum_{k=1}^{n} k \cdot P\{\nu = k\} = a \cdot M\nu.$$

Сонымен:

$$MS_\nu = a \cdot M\nu$$

9) N жәшікке n шар кездейсоқ орналастырылған. Әрбір шар басқаларына тәуелсіз түрде $\frac{1}{N}$-тең ықтималдықпен жәшіктердің кез келгеніне орналаса алады. $\mu_0(n,N)$ арқылы бос жәшіктердің санын белгілейік. Онда: **а)** $M\ \mu_0(n,N)$ неге тең? **б)** Егер $n \to \infty$, $N \to \infty$ және $\frac{n}{N} \to \alpha \in (0,\infty)$ болса, бұл математикалық күтімнің шегі неге тең?

Іс жүзінде $P\{\mu_0(n,N)=k\}$ ықтималдықтарын табу аса қиын емес. Бірақ математикалық күтімді тікелей $\sum_{k=0}^{N-1} k\cdot P\{\mu_0(n,N)=k\}$ формуласымен есептеу біраз еңбектенуді қажет етеді. (Төмендегі ескертуді қараңыз). Сондықтан біз бұл математикалық күтімді басқаша әдіспен есептейміз. Жаңа $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N$ кездейсоқ шамаларын былайша анықталық: егер і-ші жәшік бос болса $\xi_i=1$, бос болмаса $\xi_i=0$. Онда $\mu_0(n,N)=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_N$, ал сызықтық қасиет бойынша $M\ \mu_0(n,N)=M\xi_1+M\xi_2+\ldots+M\xi_N$. $M\xi_i$-ді есептеу үшін ξ_i кездейсоқ шамасының үлестіру заңын табалық. $\{\xi_i=1\}$ деген оқиға егер *i*-ші жәшік бос болса ғана (басқа жәшіктер туралы ешқандай әңгіме жоқ) пайда болады, ендеше

$$\mathrm{P}\{\xi_i=1\}=\frac{(N-1)^n}{N^n}=\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$$

себебі бұл ықтималдық барлық n шарды i-ші жәшіктен басқа қалған жәшіктерге орналастырудың ықтималдығына тең (бізге тек i-ші жәшіктің бос болғаны қажет, қалған жәшіктердің ішінде бостары болуы да, болмауы да мүмкін, ал ондай үлестірулердің саны $(N-1)^n$). Сонымен:

$$M\xi_i=\left(1-\frac{1}{N}\right)^n,\quad i=1,2,\ldots,N$$

$$M\ \mu_0(n,N)=N\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$$

Егер $\frac{n}{N}=\alpha_{n,N}\to\alpha\ (n\to\infty,N\to\infty)$, болса, онда

$$N\left(1-\frac{1}{N}\right)^n=N\left(1-\frac{\alpha_n}{n}\right)^n=Ne^{-\alpha}(1+o(1)).$$

10) n шарды N жәшікке орналастырған кезде бірде-бір жәшік бос қалмайтындай етіп орналастырулар санын $A(n,N)$ арқылы белгілейік. Онда комбинаториканы пайдаланып

$$A(n,N+1)=\sum_{k=1}^{n} C_n^k A(n-k,N) \tag{11}$$

болатындығын көрсетуге болады және осы соңғы қатынастан

$$A(n,N)=\sum_{\nu=0}^{N}(-1)^{\nu}C_N^{\nu}(N-\nu)^n \tag{12}$$

болатындығы шығады.

Есеп. (11),(12) формулаларды дәлелдеңіз.

Сілтеме. Бұл есепті шығарғанда индукцияны пайдаланыңыз: (12) орындалады деп есептеп, соған сәйкес (11)-дегі $A(n-k,N)$-ді өрнектеңіз. Сосын қосу ретін ауыстырып $A(n, N+1)$-ді екі жай қосынды түрінде жазу үшін биномның формуласын пайдаланыңыз Екінші қосындыда $\nu+1$ -ді жаңа қосу индексімен ауыстырыңыз да $C_{r-1}^{n}+C_{r}^{n}=C_{r}^{n+1}$ қатынасын пайдаланыңыз.

11) *Таңдау кезіндегі күту уақыты*. Барлығы n әртүрлі элементтен тұратын бас жиынтықтан көлемі r-ге тең қайталанатын (қайтарылатын) таңдама алынған болсын. Қайталану мүмкіндігі бар болғандықтан көлемі r-ге тең кездейсоқ таңдаманың әртүрлі элементтерінің саны r-ден артпайды. Таңдаманың көлемін ұлғайтқан сайын оның элементтерінің ішінде жаңа элементтер пайда болуы сирей береді. Мынандай сұрақ қоялық: таңдамада r әртүрлі элемент болу үшін оның көлемі μ_r қандай болуы керек? (Жеке жағдай ретінде $n=365$ мүмкін болатын туған күндерден тұратын бас жиынтықты (жыл күндерін) қарастыруға болады. Мұнда μ_r r әртүрлі күндер пайда болғанша таңдамаға іліккен адамдар саны. Сәйкес есепті шарларды жәшіктерге кездейсоқ үлестірген жағдайда да қарастыруға болады).

Баяндауды ықшамдау үшін бас жиынтықтан алынған элемент бұрын алынбаған элемент болатын (бірінші рет алынатын) тәжірибені (алуды) *табысты тәжірибе* деп айтуға келіселік. Онда μ_r r-ші табысқа дейінгі тәжірибе (алу) сандары. $\xi_к=\mu_{k+1}-\mu_k$ деп белгілейік. Онда ξ_k-1 k-мен $(k+1)$-ші табыс аралығындағы (бас жиынтықтан) элемент алу сандары. Мұндай алулар (тәжірибелер) кезінде бас жиынтықта әлі де алынған таңдамаға енбеген $n-k$ элемент болады, сондықтан ξ_k-1 табыс ықтималдығы $p=\dfrac{n-k}{n}$ болатын Бернулли сынақтарындағы бірінші табысқа дейінгі сәтсіздік саны, демек ξ_k -бірінші табыс k-рет болатынын білдіретін геометриялық кездейсоқ шама. Онда 6-мысалға сәйкес, $M\xi_k=\dfrac{1}{p}=\dfrac{n}{n-k}$. Ақыр соңында $\mu_r=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_r$ болғандықтан,

$$\mathrm{M}\mu_r=\sum_{k=1}^{r}\mathrm{M}\xi_k=\sum_{k=1}^{r}\frac{n}{n-k}=n\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+\frac{1}{n-r+1}\right)^{-1}.$$

Мәселен, $\mathrm{M}\mu_n$ таңдамаға бас жиынтықтың барлық элементтері енетін болатындай элемент алулардың орташа саны. Егер $n=10$ болса, онда $M\mu_5\approx 6,5$ және $M\mu_{10}\approx 29,3$. Бұл дегеніміз 10 элементтен тұратын бас жиынтықтан қайталамалы түрде элементтер алған кезде 5-уі әртүрлі болуы үшін алулар саны шамамен 7 болу керек; ал 10 əртЇрлі элемент алу үшін тәжірибені (шар алуды) шамамен 29 рет қайталауымыз керек деген сөз. Сонымен, бұл мысалда біз математикалық күтімді тікелей μ_r-дің үлестірімін пайдаланбай-ақ таптық.

12) Құтыда 1-ден n-ге дейін нөмірленген n шар бар болсын. Құтыдан көлемі r-ге тең қайталанатын таңдама алынсын. ξ-арқылы осы таңдамадағы шарлардың нөмірлерінің ең үлкенін белгілелік (егер i_j арқылы j-рет алынған шардың нөмірін белгілесек, онда $(i_1, i_2, ..., i_r)$ қайталанатын таңдамасы Їшін $\xi=max\{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$. Онда, әрине, $\{\xi\le k\}$ оқиЄасы алынған r-шардың бәрінің нөмірі $\le k$ болғанда ғана пайда болады, яғни олардың әрқайсысы нөмірлері 1,2,...$к$ болатын шарлардың ішінен алынғанда ғана пайда болады. Сондықтан $P\{\xi \le k\} = \left(\frac{k}{n}\right)^r$. Демек ξ кездейсоқ шамасының үлестірім заңын біз былай таба аламыз:

$$p_k = P\{\xi = k\} = P\{\xi \le k\} - P\{\xi \le k-1\} = \left(\frac{k}{n}\right)^r - \left(\frac{k-1}{n}\right)^r = \frac{k^r - (k-1)^r}{n^r}$$

Бұдан

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} kp_k = n^{-r}\sum_{k=1}^{n} k[k^r - (k-1)^r] = n^{-r}\sum_{k=1}^{n}[k^{r+1} - (k-1)^{r+1} - (k-1)^r] =$$

$$= n^{-r}[n^{r+1} - \sum_{k=1}^{n}(k-1)^r].$$

Аса үлкен n-дер үшін $\sum_{k=1}^{n}(k-1)^r$ қосындысын $y = x^r, x = 0, \ x = n, \ y = 0$ қисықтарымен шенелген облыстың ауданымен жуықтауға болады, яғни ол шамамен $\frac{n^{r+1}}{r+1}$ тең. Сонымен, аса үлкен n-дер үшін

$$M\xi \approx n^{-r}\left[n^{r+1} - \frac{n^{r+1}}{r+1}\right] = n - \frac{n}{r+1} = \left(\frac{r}{r+1}\right)n$$

Мәселен, егер көлемі $n = 1000$-ға тең элементтері 1ден 1000-ға дейін н-мірленген бас жиынтықтан көлемі $r = 10$-ға тең қайталанатын таңдама алсақ, онда осылардың ішіндегі ең үлкен бақыланған нөмірдің математикалық күтімі $M\xi \approx \frac{10}{11}\cdot 1000 \approx 910$. Жоғарыдағы $M\xi$ үшін алынған формула статистикада белгісіз n-ді табу үшін пайдаланылатынына оқушы назарына аудара кетелік.

Ескерту. Егер біз (12) формуланы дәлелдедік деп есептесек, онда

$$P\{\mu_0(n,N) = k\} = A(n, N-k)N^{-n}$$

$$M\mu_0(n,N) = \sum_{k=0}^{N-1} k\cdot N^{-n}\cdot A(n,N-k) =$$

$$= N^{-n}\sum_{k=0}^{N-1} k\cdot \sum_{j=0}^{N-k}(-1)^j C_{N-k}^{j}(N-k-j)^n$$

Әрине, бұл соңғы қосындыны есептеу оңай емес. 9-мысал бұл қосындының $N\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$ болатындығын көрсетеді. Бұл көп реттерде математикалық күтімнің қасиеттерін пайдалану есепті шығаруды әлдеқайда жеңілдететінінің тағы бір мысалы.

Сонымен 9-10 мысалдардан биномдық коэффициенттер үшін мынандай әдемі қатынас алатынымызға да оқушы назарын аудара кетелік:

$$\sum_{k=0}^{N-1} k \cdot \sum_{j=0}^{N-k} (-1)^j C_{N-k}^j (N-k-j)^n = N(N-1)^n$$

Математикалық күтімнің “ақиқат дерлік” қасиеттері.

Қазір біз келтірелік деп отырған математикалық күтімнің қасиеттері “P – ақиқат дерлік” деп аталатын ұғыммен байланысты. Сондықтан алдымен бұл ұғымның анықтамасын келтірейік.

Анықтама. Егер қандай да бір қасиет үшін $P(N) = 0$ болатын $N \in F$ жиыны табылса және де бұл қасиет барлық $\omega \in \Omega - N$ нүктелері үшін орындалатын болса, онда біз бұл қасиет *“P-ақиқат дерлік”* (“*P-барлық жерде дерлік*”) орындалады дейміз.

Ықтималдықтар теориясында көбінесе “P-ақиқат дерлік”, ”P-барлық жерде дерлік” деген сөз тіркестерінің орнына “ақиқат дерлік” (а.д), немесе “барлық жерде дерлік” (б.ж.д) деген сөз тіркестерін қолданады.

Мәселен $P\{\omega : \xi(\omega) = 0\} = 1$ деген қасиет $\xi = 0$ (а.д) дегенді білдіреді, яғни 1-ге тең ықтималдықпен ξ нөлге тең деген сөз. $\xi \geq 0$ (а.д.) деген $P\{\omega : \xi(\omega) \geq 0\} = 1$ дегенді, яғни 1-ге тең ықтималдықпен ξ кездейсоқ шамасы теріс емес дегенді білдіреді.

Енді математикалық күтім үшін “*ақиқат дерлік*” қасиеттердің бірнешеуін дәлелдеп, көрсете кетелік. Бұларды біз кейін пайдаланатын боламыз.

1. Егер $\xi = 0$ (а.д) болса, онда $M\xi = 0$

Шындығында да, егер $\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i I_{A_i}(\omega) = 0$ (а.д) болса, онда $x_i \neq 0$ үшін $P(A_i) = 0$ яғни

$M\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i P(A_i) = 0$

2. Егер $\xi \geq 0$ (а.д) болса, онда $M\xi \geq 0$.

Расында да, егер $x_i < 0$ болса $P(A_i) = 0$, яғни

$$M\xi = \sum_i x_i P(A_i) = \sum_{i: x_i < 0} x_i P(A_i) + \sum_{i: x \geq 0} x_i P(A_i) = \sum_{i: x_i \geq 0} x_i P(A_i) \geq 0$$

3. Егер $\xi = \eta$ (а.д) болса, онда $M\xi = M\eta$

Шындығында да, айталық $N = \{\omega : \xi(\omega) \neq \eta(\omega)$ болса, онда $P(N = 0)$ ал $\xi = \xi \cdot I_N + \xi \cdot I_{\overline{N}};\quad \eta = \eta \cdot I_N + \eta \cdot I_{\overline{N}} = \eta \cdot I_N + \xi \cdot I_{\overline{N}}$. Ендеше $\xi \cdot I_N = 0\ (a.\partial.)$ және $\eta \cdot I_N = 0\ (a.\partial.)$ болғандықтан, $M(\xi \cdot I_N) = M(\eta \cdot I_N) = 0$ демек

$$M\xi = M(\xi \cdot I_N) + M(\xi \cdot I_{\overline{N}}) = M(\xi \cdot I_{\overline{N}}) = M(\eta \cdot I_{\overline{N}}) =$$

$$= M(\eta \cdot I_{\overline{N}}) + M(\eta \cdot I_N) = M(\eta \cdot I_{\overline{N}} + \eta \cdot I_N) = M\eta$$

4. Егер $\xi \geq \eta$ (а.д.) болса, онда $M\xi \geq M\eta$.

Себебі $\xi \geq \eta$ (а.д) болса, онда $\xi - \eta \geq 0\ (a.\partial)$, бұдан математикалық күтімнің сызықтық қасиеті және жоғарыдағы 2-қасиет бойынша $M(\xi - \eta) = M\xi - M\eta \geq 0$.

5. Егер $\xi \geq 0$, $M\xi = 0$ болса, онда $\xi = 0\,(а.д.)$.

Шындығында, егер $\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i I_{A_i}(\omega)$ болса, онда шарт бойынша $x_i \geq 0\ (i = 1,\dots,k)$, бірақ $M\ \xi = \sum_{i=1}^{k} x_i P(A_i) = 0$ болғандықтан, егер $x_i > 0$ болса $P(A_i) = 0$. Сондықтан

$$\mathrm{P}\{\omega : \xi(\omega) \neq 0\} = \sum_{i:x_i>0} \mathrm{P}\{\omega : \xi(\omega) = x_i\} = \sum_{i:x_i>0} \mathrm{P}(A_i) = 0,$$

демек $\mathrm{P}\{\omega : \xi(\omega) = 0\} = 1$, яғни $\xi = 0\,(а.д.)$.

Ескерту. Бұл параграфта біз "ақиқат дерлік" қасиеттердің кейбірін дискретті ықтималдық кеңістігінде анықталған (қарапайым) кездейсоқ шамалар үшін келтіріп дәлелдедік. Бұл қасиеттер жалпы жағдайда да дұрыс болып қала беретініне біз кейініректе (2-бөлімде) көз жеткізетін боламыз. Әзірше, тағы да бір айналып соғып назар аудара кететін нәрсе, ол- ақиқат дерлік орындалатын қасиет дегеннің анықтамасының жалпы жағдайда да өзгеріссіз айтылатындығы.

2.3. Математикалық күтімге байланысты теңсіздіктер.

Жоғарыда біз егер $\xi \geq 0$ болса, онда $M\xi \geq 0$, $|M\xi| \leq M|\xi|$ және егер $\xi \geq \eta$ болса, $\mathrm{M}\,\xi \geq \mathrm{M}\,\eta$ болатынын дәлелдедік. Енді іс жүзінде жиі қолданылатын математикалық күтімге байланысты тағы да бірнеше теңсіздіктерді дәлелдемес бұрын мынандай ескертпе айта кетелік. Бұл теңсіздіктерді дәлелдеген кезде біз математикалық күтімнің жоғарыда келтірілген қасиеттерін ғана пайдаланатын боламыз, ал кездейсоқ шаманың қандай кездейсоқ шама екендігі, ықтималдық кеңістігінің қандай кеңістік екендігі т.с.с. еш жерде қолданылмайды. Басқаша айтқанда дәлелденетін тұжырымдардың дәлелдеу әдістерін (тәсілдерін) жалпы жағдайда да қолдануға болады және де олар қарастырып отырған схеманың ақырлы екендігіне еш байланыссыз болады.

Төмендегі математикалық күтімге байланыстты теңсіздіктер анализде қосындыларға (жалпы жағдайда- интегралдарға) байланысты теңсіздіктер ретінде бұрыннан белгілі екендігін де еске сала кетелік.

а) ***Коши-Буняковский теңсіздігі***

Тұжырым. Кез келген ξ, η кездейсоқ шамалары Їшін

$$M|\xi \cdot \eta| = \sqrt{M\xi^2} \cdot \sqrt{M\eta^2} \tag{9}$$

(9) теңсіздік *Коши-Буняковский теңсіздігі* деп аталады.

Дәлелдеуі. Айталық, $M\xi^2 > 0$, $M\eta^2 > 0$ болсын. Онда $\tilde{\xi} = \dfrac{\xi^2}{\sqrt{\mathrm{M}\,\xi^2}}$, $\tilde{\eta} = \dfrac{\eta^2}{\sqrt{\mathrm{M}\,\xi^2}}$ кездейсоқ шамалары үшін $M\tilde{\xi}^2 = M\tilde{\eta}^2 = 1$. Әрқашан $2|\tilde{\xi}\,\tilde{\eta}| = \tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2$ болғандықтан

4^0-қасиет бойынша $2M\left|\tilde{\xi}\tilde{\eta}\right| \le \quad = M\tilde{\xi}^2 + M\tilde{\eta}^2 = 1 + 1 = 2$, яЄни $M\left|\tilde{\xi}\,\tilde{\eta}\right| \le 1$ немесе $\left(M\left|\xi\eta\right|\right)^2 \le M\xi^2 \cdot M\eta^2$, яЄни (9) теңсіздік дұрыс.

Егер, айталық $M\xi^2 = 0$ болса, онда $\xi = 0$ (а.д.) (2.2-пункттегі 5-қасиетті қараңыз), бұдан $\xi \cdot \eta = 0$ (а.д), немесе $\left|\xi \cdot \eta\right| = 0$ $(а.д.)$ болатыны шығады. Онда (9) теңсіздік математикалық күтімнің ақиқат дерлік қасиеті бойынша $0 = \left|M(\xi \cdot \eta)\right| = \sqrt{M\xi^2} \cdot \sqrt{M\eta^2} = 0$ теңдігіне айналады. ♦

Есеп. (9) теңсіздікті кез келген x, y үшін $M\left(x\xi + y\eta\right)^2 \ge 0$ болатындығын пайдаланып дәлелдеңіз.

(9)-теңсіздіктің қосындыларға байланысты теңсіздік түрінде қалай жазылатынын көрсетелік

Егер

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{k} x_i I_{A_i}(\omega)\ ,\ \eta(\omega) = \sum_{j=1}^{l} y_j I_{B_j}(\omega)\,,$$

$$P_{ij} = \sum_{i,j} P\left\{\xi = x_i, \eta = y_j\right\}\ ,\ P_{i\cdot} = \sum_{j} P_{ij} = P\left\{\xi = x_i\right\},$$

$$P_{\cdot j} = \sum_{i} P_{ij} = P\left\{\eta = y_j\right\},$$

болса, онда $P_{\cdot j} \ge 0\,, P_{i\cdot} \ge 0\,,\ P_{ij} \ge 0\ ,\sum_{i} P_{i\cdot} = \sum_{j} P_{\cdot j} = \sum_{i,j} P_{ij} = 1$ сандары үшін математикалық күтімнің анықтамасы бойынша (9)-теңсіздік былай жазылған болар еді:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\left|x_i y_j\right| P_{ij} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 P_{i\cdot}} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{l} y_j^2 P_{\cdot j}} \qquad (9')$$

ә) *Иенсен және Ляпунов теңсіздіктері.*

Тұжырым. Егер $g = g(x)$ сандық функциясы ойыс функция болса, онда кез келген ξ кездейсоқ шамасы үшін

$$Mg(\xi) \ge gM(\xi) \qquad (10)$$

(10)-теңсіздігі *Иенсен теңсіздігі* деп аталады.

Дәлелдеу. Ойыс функция туралы анализден белгілі мына тұжырымды пайдаланалық: кез келген ойыс $g(x)$ функциясы және кез келген $x_0 \in R$ нүктесі үшін қандай да бір $\lambda = \lambda(x_0)$ тұрақтысы табылады да барлық $x \in R$ үшін мына теңсіздік орындалады:

$$g(x) \ge g(x_0) + \lambda(x - x_0). \qquad (11)$$

Соңғы теңсіздікте $x_0 = M\xi$, $x = \xi$ деп алып математикалық күтімнің 4^0-қасиетін қолданалық. Онда

$$\mathrm{M}g(\xi) \geq g(\mathrm{M}\xi) + \lambda\mathrm{M}\left(\xi - \mathrm{M}\xi\right) = g\left(\mathrm{M}\xi\right),$$

Дәлелдеу керегі де осы еді. ♦

Ескертулер. 1. Егер $g = g(x)$ дөңес функция болса, онда әрине (10) теңсіздік керісінше жазылған болар еді.

2. Егер $g(x)$ функциясының екінші ретті туындысы бар болса, онда $g''(x) \geq 0$ шарты ойыс функция болудың жеткілікті шарты болатынын еске сала кетелік. Жалпы (a,b) аралығында, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ анықталған $g(x)$ функциясы ойыс функция болуы үшін кез келген $x_1, x_2 \in (a,b)$ нүктелері үшін және кез келген $0 \leq \lambda \leq 1$ саны үшін

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda g(x)_1 + (1-\lambda)g(x_2) \qquad (11')$$

шартының орындалуы қажетті және жеткілікті болатындығын да еске түсіре кетелік. Мәселен, $g(x) = |x|^r$, $r > 1$ функциясы ойыс функция. (Тексеріңіз!)

Тұжырым. Кез келген $0 < s < t$ сандары үшін және кез келген ξ кездейсоқ шамасы үшін

$$\left(M|\xi|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(M|\xi|^t\right)^{\frac{1}{t}} \qquad (12)$$

(12)-теңсіздік *Ляпунов теңсіздігі* деп аталады.

Дәлелдеу. $r = \frac{t}{s}$ деп, $\eta = |\xi|^S$ деп белгілелік те Иенсен теңсіздігін $g(x) = |x|^r$ функциясы мен η кездейсоқ шамасына қолданалық. Онда

$$Mg(\eta) \geq g(M\eta), \text{ яғни } \mathrm{M}\left(|\xi|^S\right)^r \geq \left|\mathrm{M}|\xi|^S\right|^r.$$

Бұдан:

$$M\left(|\xi|^s\right)^{\frac{t}{s}} \geq \left(M|\xi|^s\right)^{\frac{t}{s}} \text{ немесе } \mathrm{M}|\xi|^t \geq \left(\mathrm{M}|\xi|^S\right)^{\frac{t}{S}}.$$

Егер соңғы теңсіздіктің екі жағын да $\frac{1}{t}$ дәрежеге шығарсақ, қажетті (12) теңсіздікті аламыз. ♦

Салдар.

$$M|\xi| \leq \left(M|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(M|\xi|^3\right)^{\frac{1}{3}} \leq \ldots \leq \left(M|\xi|^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

Бұл теңсіздіктер тізбесін дәлелдеу үшін Ляпунов теңсіздігін $s = 1, t = 2; s = 2, t = 3; \ldots, s = n-1, t = n;$ болған жағдайларда жазсақ жеткілікті. ♦

Ескерту. Біз қарастырып отырған ақырлы схемада әрқашан кез келген $n < \infty$ үшін $M|\xi|^n < \infty$. Бірақ, жалпы жағдайда $M|\xi|^n$ ақырлы болуы міндетті емес (1-пунктті қараңыз). Дегенмен, Ляпунов теңсіздігінің салдарынан мынандай тамаша қорытынды шығады: *егер қандай да бір бүтін* $n > 0$ *үшін* $M|\xi|^n < \infty$ *болса, онда барлық* $k = 1,2,\dots,n-1$ *үшін* $M|\xi|^k < \infty$, *басқаша айтқанда кездейсоқ шаманың* n*-ші моменті ақырлы болса, онда оның барлық төмен дәрежелі моменттері* $M\xi^n$ *де ақырлы болады (2.1 пункттің соңындағы ескертуді қараңыз).*

в) ***Гельдер және Минковский теңсіздіктері.***

Тұжырым. Айталық, $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ және $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ болсын. Онда

$$M|\xi\eta| \le \left(M|\xi|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(M|\xi|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (13)$$

(13) теңсіздік *Гельдер теңсіздігі* деп аталады.

Егер $p = q = 2$ болса, онда (13) Коши-Буняковский теңсіздігіне ((9)) айналады.

Дәлелдеу. Егер $M|\xi|^p = 0$ немесе $M|\xi|^q = 0$ болса, онда (13) $0 = 0$ теңдігіне айналады (Коши-Буняковский теңсіздігінің дәлелдеуін қараңыз).

Енді $M|\xi|^p > 0$ $M|\xi|^q > 0$ болсын. Жаңа $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ кездейсоқ шамаларын былай енгізелік:

$$\tilde{\xi} = \frac{|\xi|}{\left(\mathrm{M}|\xi|^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad \tilde{\eta} = \frac{|\eta|}{\left(\mathrm{M}|\eta|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Онда $\mathrm{M}\left|\tilde{\xi}\right|^p = \mathrm{M}|\tilde{\eta}|^q = 1.$

Екіншіден $y = \ln x$ функциясы дөңес функция болғандықтан (себебі $y'' = -\frac{1}{x^2} < 0$) барлық $x_1, x_2 > 0, 0 \le \lambda \le 1$ үшін $(11')$ теңсіздігіне кері мына теңсіздік орындалады:

$$\ln(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda \ln x_1 + (1-\lambda)\ln x_2 = \ln(x_1^{\lambda} x_2^{1-\lambda})$$

Бұдан

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \ge x_1^{\lambda} x_2^{1-\lambda}$$

Онда

$$x_1 = \left|\tilde{\xi}\right|^p, x_2 = |\tilde{\eta}|^q, \lambda = \frac{1}{p}, 1-\lambda = \frac{1}{q}$$

деп алсақ, соңғы теңсіздік былай жазылар еді:

$$\left(\left|\tilde{\xi}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|\tilde{\eta}\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}=\left|\tilde{\xi}\,\tilde{\eta}\right|\leq\frac{1}{p}\left|\tilde{\xi}\right|^{p}+\frac{1}{q}\left|\tilde{\eta}\right|^{q}$$

Ендеше :

$$M\left|\tilde{\xi}\,\tilde{\eta}\right|\leq\frac{1}{p}M\left|\tilde{\xi}\right|^{p}+\frac{1}{q}M\left|\tilde{\eta}\right|^{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Ал бұл қажетті (13) теңсіздіктің дәл өзі. ♦

Егер Коши-Буняковский теңсіздігіндегі секілді (13) теңсіздікті қосындылар үшін жазсақ ол былай жазылар еді:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\left|x_i y_j\right|P_{ij}\leq\left(\sum_{i=1}^{k}\left|x_i\right|^{p}P_{i\cdot}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{l}\left|y_j\right|^{q}P_{\cdot j}\right)^{\frac{1}{q}}\qquad(13')$$

Тұжырым. Кез келген $\xi\ ,\eta$ кездейсоқ шамалары үшін және барлық $1\leq p<\infty$ үшін

$$\left(M\left|\xi+\eta\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(M\left|\xi\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(M\left|\eta\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\qquad(14)$$

(14)-теңсіздік *Минковский теңсіздігі* деп аталады.

Дәлелдеу. Алдымен мынандай теңсіздіктің дұрыс екендігін еске сала кетелік: егер $a,b>0$ және $p\geq 1$ болса , онда

$$\left(a+b\right)^{p}\leq 2^{p-1}\left(a^{p}+b^{p}\right)\qquad(15)$$

Есеп. (15)-теңсіздікті дәлелдеңіз.
(15)-теңсіздікке сәйкес

$$\left|\xi+\eta\right|^{p}\leq\left(\left|\xi\right|+\left|\eta\right|\right)^{p}\leq 2^{p-1}\left(\left|\xi\right|^{p}+\left|\eta\right|^{q}\right),\qquad(15')$$

Егер $p=1$ болса, онда (14) теңсіздік мынаған пара-пар:

$$M\left|\xi+\eta\right|\leq M\left|\xi\right|+M\left|\eta\right|$$

Бұл теңсіздік математикалық күтімнің 8^0 қасиетінің салдары.

Айталық, енді $p>1$ болсын. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ шартын қанағаттандыратын q санын алалық. Онда:

$$\left|\xi+\eta\right|^{p}=\left|\xi+\eta\right|\cdot\left|\xi+\eta\right|^{p-1}\leq\left|\xi\right|\cdot\left|\xi+\eta\right|^{p-1}+\left|\eta\right|\cdot\left|\xi+\eta\right|^{p-1}\qquad(16)$$

Бірақ $(p-1)q = p$ болғандықтан

$$M\left(\left|\xi+\eta\right|^{p-1}\right)^{q} = M\left|\xi+\eta\right|^{p}$$

Сондықтан Гельдер теңсіздігі бойынша:

$$\mathrm{M}\left(\left|\xi\right|\cdot\left|\xi+\eta\right|^{p-1}\right) \le \left(\mathrm{M}\left|\xi\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\mathrm{M}\left|\xi+\eta\right|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(M\left|\xi\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(M\left|\xi+\eta\right|^{p}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Дәл сол сияқты:

$$M\left(\left|\eta\right|\cdot\left|\xi+\eta\right|^{p-1}\right) \le \left(M\left|\eta\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(M\left|\xi+\eta\right|^{p}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Енді (16) теңсіздікті еске алсақ, бұдан мынау шығады:

$$M\left|\xi+\eta\right|^{p} \le \left(M\left|\xi+\eta\right|^{p}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(M\left|\xi\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(M\left|\eta\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\right) \qquad (16')$$

Егер $M\left|\xi+\eta\right|^{p} = 0$ болса, онда (14) 0=0 айналады.

Егер $M\left|\xi+\eta\right|^{p} > 0$ болса, онда (16) теңсіздіктің екі жағын да $\left(M\left|\xi+\eta\right|^{p}\right)^{\frac{1}{q}}$-не бөлеміз. Сонда:

$$\left(M\left|\xi+\eta\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(M\left|\xi+\eta\right|^{p}\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \left(M\left|\xi\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(M\left|\eta\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Бұл біз дәлелдемек болған (14) теңсіздіктің өзі. ♦

д) *Чебышев теңсіздігі.*

Тұжырым. Егер ξ теріс емес кездейсоқ шама болса, онда кез келген $\varepsilon > 0$ үшін

$$P\{\xi \ge \varepsilon\} \le \frac{M\xi}{\varepsilon} \qquad (17)$$

Дәлелдеу. $\xi \ge 0$ үшін мына теңсіздіктер тізбесін жаза аламыз:

$$\xi = \xi\cdot I_{\{\xi\ge\varepsilon\}} + \xi\cdot I_{\{\xi<\varepsilon\}} \ge \xi\cdot I_{\{\xi\ge\varepsilon\}} \ge \varepsilon\cdot I_{\{\xi\ge\varepsilon\}}$$

Бұдан математикалық күтімнің теріс еместік қасиеті бойынша:

$$M\xi \ge M\left(\varepsilon I_{\{\xi\ge\varepsilon\}}\right) = \varepsilon\, MI_{\{\xi\ge\varepsilon\}} = \varepsilon\, P\{\xi\ge\varepsilon\},$$

яғни (17) дұрыс. ♦

Салдар. Егер ξ кез келген кездейсоқ шама болса, онда кез келген $\varepsilon > 0$ үшін

$$P\{\left|\xi\right| \ge \varepsilon\} \le \frac{M\left|\xi\right|}{\varepsilon} \qquad (18_1)$$

$$P\{|\xi| \ge \varepsilon\} \le \frac{M\xi^2}{\varepsilon^2} \qquad (18_2)$$

$$P\{|\xi - M\xi| \ge \varepsilon\} \le \frac{M(\xi - M\xi)^{2k}}{\varepsilon^{2k}} \quad (k = 1,2,\dots) \qquad (18_3)$$

$$P\{|\xi - M\xi| \ge \varepsilon\} \le \frac{M|\xi - M\xi|^{\alpha}}{\varepsilon^{\alpha}} \quad (\alpha > 0) \qquad (18_4)$$

Дәлелдеу. (18_1) теңсіздігі $|\xi| \ge 0$ үшін қайта жазылған (17) теңсіздіктің өзі, ал (18_2), (18_3), (18_4) теңсіздіктері $\xi \ge 0$ үшін сәйкес

$$\{|\xi| \ge \varepsilon\} = \{\xi^2 \ge \varepsilon^2\}$$

$$\{|\xi - M\xi| \ge \varepsilon\} = \{|\xi - M\xi|^{2k} \ge \varepsilon^{2k}\}$$

$$\{|\xi - M\xi| \ge \varepsilon\} = \{|\xi - M\xi|^{\alpha} \ge \varepsilon^{\alpha}\} \qquad (\alpha > 0))$$

қатынастары орындалатындығынан және оң жақтағы оқиғаларға (18_1) (немесе (17)) теңсіздігін қолданғаннан шығады.

Ескерту. Кездейсоқ шаманың өзінің математикалық күтімінен ауытқуының квадратының математикалық күтімі, яғни $M(\xi - M\xi)^2$, *дисперсия* деп аталады да, ол $D\xi$ арқылы белгіленеді:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$$

Онда (18) теңсіздікгерінің үшіншісі $k = 1$ үшін былай жазылар еді:

Кез келген ξ кездейсоқ шамасы үшін және кез келген $\varepsilon > 0$ үшін

$$P\{|\xi - M\xi| > \varepsilon\} \le \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \qquad (19)$$

Әдетте осы (19) теңсіздік *Чебышев теңсіздігі* деп аталады. Бұл теңсіздіктің көмегімен біз $M\xi$ мен $D\xi$-ді білу арқылы $|\xi - M\xi|$ ауытқуының ықтималдығын бағалай аламыз.

Чебышев теңсіздігінің қолданылуына бір мысал келтіре кетелік.

Мысал. Бернуллидің тәуелсіз сынақтар тізбегіндегі табыстың салыстырмалы жиілігі $\frac{\mu_n}{n}$-нің табыс ықтималдығы p-дан ауытқуының ықтималдығын бағалалық. Бұрын көрсеткеніміздей $M\mu_n = np$, демек $M\frac{\mu_n}{n} = p$. Сонымен бірге

$D\mu_n = npq$, $D\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = \frac{pq}{n^2}$, (келесі пунктті қараңыз). Сондықтан кез келген $\varepsilon > 0$ үшін Чебышев теңсіздігі бойынша

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \tag{20}$$

Сол жақтағы ықтималдық берілген $1-\alpha$ ықтималдығынан (α -әдетте нөлге мейлінше жақын оң сан) кем болмау үшін қанша сынақ жүргізу керек деген сұрақ қоялық. Қажетті сынақ саны n -ді мына теңсіздіктен анықтауымызға болады:

$$\frac{pq}{n\varepsilon^2} \le \frac{1}{4n\varepsilon^2} \le \alpha$$

Бұдан n мына теңсіздікті қанағаттандыратын ең кіші бүтін сан болатындығы шығады:

$$n \ge \frac{1}{4\varepsilon^2\alpha}$$

Егер, мәселен $\alpha = 0.05$, ал $\varepsilon = 0.02$ болса, онда қажетті сынақ саны $n = 12500$, яғни 12500 немесе одан да көп сынақ жүргізу $P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \le 0.02\right\} \ge 0.95$ теңсіздігін белгісіз параметр p -ға тәуелсіз түрде қамтамасыз етеді.

Дисперсия.

Жоғарыда (1 параграфта) біз егер ξ – дискретті кездейсоқ шама, $g(x)$ – қандай да бір сандық функция болса, онда $g(\xi)$ – кездейсоқ шамасының математикалық күтімі $\mathrm{M}\,g(\xi)$ -ді есептеу формулаларын алғанбыз. (2.1 пункттегі (7) формуланы қараңыз). Егер ξ -дің үлестірім заңын пайдалансақ, ол былай жазылған болар еді:

$$Mg(\xi) = \sum_{i=1}^{k} g(x_i)\mathrm{P}\{\xi = x_i\}$$

Егер $g(x) = x^n$ деп алсақ онда жоғарыдағы формуладан

$$\mathrm{M}\,\xi^n = \sum_{i=1}^{k} x_i^{\,n}\mathrm{P}\{\xi = x_i\}$$

Осы сияқты формулаларды $g(x^n) = |x|^n$ $g(x) = (x - \mathrm{M}\,\xi)^n$, $g(x) = |x - \mathrm{M}\,\xi|^n$ функциялары үшін де жазуға болар еді. Олар жалпы ξ – кездейсоқ шамасының *моменттері* деген атпен белгілі. Дәл анықтамаларын келтіре кетелік.

$\mathrm{M}\,\xi^n$ математикалық күтімі ξ – кездейсоқ шамасының n *-ші моменті* (немесе n *-ші ретті моменті*) деп аталады.

$M|\xi|^n$ - ξ кездейсоқ шамасының n *-ші абсолютті моменті* деп аталады.

$M\left(\xi - M\xi\right)^n$ - ξ кездейсоқ шамасының n*-ші ретті орталық моменті* деп, ал $M\left|\xi - M\xi\right|^n$ – n *-ші ретті орталық абсолютті моменті* деп аталады.

Кездейсоқ шаманың екінші ретті орталық моменті оның *дисперсиясы* деп аталады да, ол $D\xi$ – арқылы белгіленеді. Сонымен

$$D\xi = M\left(\xi - M\xi\right)^2 \tag{21}$$

Моменттердің арасындығы байланыстарға сәл кейінірек тоқталамыз. Әзірше дисперсияның бірнеше қарапайым қасиеттерін келтірмес бұрын бір ескертпе айта кетелік.

Ескерту. Дисперсия ұғымының пайдалылығына біз біртіндеп, әсіресе ықтималдықтар теориясының шектік теоремалары деп аталатын теоремаларына байланысты көз жеткізетін боламыз. Әзірше дисперсияны кездейсоқ шаманың мәндерінің *шашылу өлшемі* ретінде қарастыруға болатынына оқушы назарын аудара кетелік. Шындығында да

$$D\xi = \sum_{i=1}^{k}\left(x_i - M\xi\right)^2 p_i \tag{21'}$$

өте аз шама болса, онда әрбір $\left|x_i - \text{M}\xi\right|^2 p_i$ шамасы да өте аз болады. Бұдан $\left|x_i - M\xi\right|$ үлкен болатын x_i-лер үшін $p_i = P\left\{\xi = x_i\right\}$ өте аз болуы керектігі шығады. Басқаша айтқанда, дисперсия аз болған жағдайда не кездейсоқ шама өз орта мәнінен өте аз ауытқиды, не кездейсоқ шаманың өз математикалық күтімінен ауытқуының ықтималдығы өте аз. Керісінше, дисперсияның аса үлкен болуы кездейсоқ шаманың мәндерінің бәрі математикалық күтімнің кішкентай аумағында жатпайтындығын көрсетеді.

Ескерту. Математикалық күтім мен дисперсияның механикалық интерпретациясы жөнінде бір-екі сөз айта кетелік. Айталық, x осінің $x_1, x_2, \ldots, x_k$ нүктелеріне $p_1, p_2, \ldots, p_k$ $\left(\sum_{j=1}^{k} p_j = 1\right)$ нүктелік массалар орналасқан болсын. Бұл жағдайда $M\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$ *ауырлық центрі*, ал $D\xi = \sum_{i=1}^{k}\left(x_i - M\xi\right)^2 p_i$ – p_i массаларының ауырлық центріне байланысты *инерция моменті*. Сонымен, $M\xi$ аумағына p_i массалары топталатын орынды сипаттайды, ал $D\xi$ p_i массаларының $M\xi$ айналасында шашырау дәрежесін көрсетеді.

Дисперсияның қасиеттері.

1⁰. Кез келген ξ кездейсоқ шамасының дисперсиясы теріс емес: $D\xi \geq 0$. Себебі $\left(\xi - M\xi\right)^2 \geq 0$ болғандықтан $D\xi = M\left(\xi - \text{M}\xi\right)^2 \geq 0$ *(математикалық кЇтімнің теріс еместік қасиеті)*

Ескерту. $\sigma = \sqrt{D\xi}$ шамасы *орташа квадраттық ауытқу* (кейде *стандартты ауытқу*) деп аталады.

2⁰. $D(a+b\xi)=b^2D\xi$, мұндағы a,b-тұрақты шамалар. Мәселен, $D(a)=0$, $D(b\xi)=b^2D\xi$

Дәлелдеу бірден анықтамадан шығады.

3⁰. Егер $D\xi=0$ болса, онда $P\{\omega:\xi(\omega)=M\xi\}=1$, яғни $\xi(\omega)=M\xi$ (а.д.).

Шындығында да $(\xi-M\xi)^2\geq 0$ болғандықтан $D\xi=0$ үшін $M(\xi-M\xi)^2=0$, онда математикалық күтімнің ақиқат дерлік қасиеті бойынша $\xi-M\xi=0$ (а.д.), яғни $\xi=M\xi$ (а. д.).

Тұрақтының дисперсиясы н-лге тең екенін ескерсек (2⁰-қара), онда бұл 3⁰-қасиетті қысқаша былай тұжырымдауға болады: *кездейсоқ шаманың дисперсиясы сонда тек сонда ғана нөлге тең болады, егер қандайда бір c тұрақтысы табылатын болса және $\xi=c$ (а.д.) орындалса*.

4⁰. Дисперсияны мына формуламен де есептеуге болады:

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2 \tag{22}$$

Себебі

$$D\xi=\mathrm{M}(\xi-\mathrm{M}\xi)^2=\mathrm{M}\left(\xi^2-2\xi\mathrm{M}\xi+(\mathrm{M}\xi)^2\right)=$$

$$=M\xi^2-2M\xi\cdot M\xi+(M\xi)^2=M\xi^2-(M\xi)^2.$$

Реті келгенде айта кетелік, дисперсияны (22)-формуланы пайдаланып есептеу көп жағдайларда мақсатқа оңайырақ жеткізеді.

5⁰. Кез келген ξ және η кездейсоқ шамалары үшін

$$D(\xi\pm\eta)=D\xi+D\eta\pm 2\mathrm{M}(\xi-\mathrm{M}\xi)(\eta-\mathrm{M}\eta) \tag{23}$$

Ґйткені

$$D(\xi+\eta)=M(\xi+\eta-M\xi-M\eta)^2=M[(\xi-M\xi)+(\eta-M\eta)]^2=$$

$$=\mathrm{M}(\xi-\mathrm{M}\xi)^2+\mathrm{M}(\eta-\mathrm{M}\eta)^2+2\mathrm{M}(\xi-\mathrm{M}\xi)(\eta-\mathrm{M}\eta)=$$

$$=D\xi+D\eta+2M(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)$$

$M(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)$ математикалық кЇтімі ξ және η кездейсоқ шамаларының *ковариациясы* деп аталады да $cov(\xi,\eta)$ арқылы белгіленеді. Сонымен

$$cov(\xi,\eta)=M(\xi-M\xi)(\eta-M\eta);\quad cov(\xi,\xi)=D\xi \tag{24}$$

Соңғы анықтаманы еске алсақ (23) формуладан

$$D(\xi\pm\eta)=D\xi+D\eta\pm 2\,cov(\xi,\eta) \tag{25}$$

Жалпы $\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n$ кез келген кездейсоқ шамалары үшін

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{n}D\xi_i+2\sum_{i<j}cov(\xi_i\xi_j) \tag{25'}$$

болатындығына оп-оңай көз жеткізуге болады.

Есеп. ($2{5'}$)-ті дәлелдеңіз.

6⁰. Егер ξ және η *тәуелсіз кездейсоқ шамалар* болса, онда

$$D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta$$

Шындығында да бұл жағдайда

$$cov(\xi,\eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M(\xi\eta - \xi M\eta - \eta M\xi + M\xi M\eta) =$$
$$= M\xi\eta - M\xi \cdot M\eta = M\xi \cdot M\eta - M\xi \cdot M\eta = 0$$

Біз бұл жерде математикалық күтімнің мультипликативтік қасиетін пайдаландық.

Сонымен, тәуелсіз ξ,η кездейсоқ шамалар үшін $cov(\xi,\eta) = 0$ екендігін біз жолай көрсете кеттік. Бұдан мына тұжырым шығады.

Тұжырым. Екеуара (қос-қостан) тәуелсіз $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ кездейсоқ шамалары үшін олардың қосындысының дисперсиясы дисперсияларының қосындысына тең:

$$D\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k$$

Дәлелдеу жоғарыда айтқаннан және ($2{5'}$) қатынасынан бірден шығады.

7⁰. Егер $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ *кездейсоқ шамаларының әрқайсысы өзінің алдындағы кездейсоқ шамалардың қосындысына тәуелсіз болса, онда*

$$D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n$$

Бұл жағдайда алдынғы қасиет бойынша

$$D(\xi_1 + \ldots + \xi_{n-1} + \xi_n) = D(\xi_1 + \ldots + \xi_{n-1}) + D\xi_n =$$
$$= D(\xi_1 + \ldots + \xi_{n-2}) + D\xi_{n-1} + D\xi_n = D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n$$

Анықтама. Егер ξ,η кездейсоқ шамаларының ковариациясы нөлге тең болса, яғни $cov(\xi,\eta) = 0$ болса, онда мұндай кездейсоқ шамалар *корреляцияланбаған (корреляциясыз)* кездейсоқ шамалар деп аталады.

Бұл анықтамадан тәуелсіз кездейсоқ шамалардың міндетті түрде крреляцияланбаған кездейсоқ шамалар болатындығы және мұндай (корреляцияланбаған) кездейсоқ шамалар үшін олардың ақырлы қосындысының дисперциясы олардың дисперсияларының қосындысына тең болатындығы шығады. (себебі ($2{5'}$) формуласында $cov(\xi_i, \xi_j) = 0 \quad (i \neq j)$).

Ескерту. Жоғарыда біз егер ξ,η тәуелсіз кездейсоқ шамалар болса, онда $cov(\xi,\eta) = 0$ болатындығын к-рдік. Бірақ кездейсоқ шамалар тәуелді болса да олардың ковариациясы н-лге тең болуы мүмкін. Басқаша айтқанда кездейсоқ шамалардың корреляцияланбағандығынан олардың тәуелсіздігі шықпайды.

Мысал. ξ бірдей ықтималдықпен $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$ мәндерін қабылдайтын кездейсоқ шама болсын. Жаңа ξ_1, ξ_2 кездейсоқ шамаларын былай анықталық: $\xi_1 = \sin\xi$, $\xi_2 = \cos\xi$. Онда 2.1 пункттегі (7) формула бойынша:

$$\mathrm{M}\xi_1 = \mathrm{M}\sin\xi = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} + \sin 0 \cdot \frac{1}{3} + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$\mathrm{M}\,\xi_2 = \mathrm{M}\cos\xi = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{3} + \cos 0\cdot\frac{1}{3} + \cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{M}\left(\xi_1\cdot\xi_2\right) = \mathrm{M}\left(\sin\xi\cdot\cos\xi\right) = \frac{1}{2}\mathrm{M}\sin 2\xi = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left[\sin(-\pi) + \sin 0 + \sin\pi\right] = 0.$$

Сонымен, $cov(\xi_1,\xi_2) = M\xi_1\xi_2 - M\xi_1\cdot M\xi_2 = 0 - 0 = 0$, бірақ ξ_1,ξ_2 кездейсоқ шамалары жоғарыдағы ықтималдықтық (стохастикалық) мағынада тәуелді болмақ түгілі $\left(\mathrm{P}\left\{\xi_1 = 1,\xi_2 = 1\right\} = 0 \neq \frac{1}{9} = \mathrm{P}\left\{\xi_1 = 1\right\}\cdot\mathrm{P}\left\{\xi_2 = 1\right\}\right)$, функционалдық түрде де тәуелді: $\xi_1^{\,2} + \xi_2^{\,2} = 1.$

Анықтама. Егер $D\xi > 0,\quad D\eta > 0$ болса, онда

$$\rho = \rho\left(\xi,\eta\right) = \frac{cov\left(\xi,\eta\right)}{\sqrt{D\xi}\cdot\sqrt{D\eta}} \tag{26}$$

шамасы ξ және η кездейсоқ шамаларының *корреляция коэффициенті* деп аталады.

Егер ξ және η тәуелсіз кездейсоқ шамалар болса, онда $\rho\left(\xi,\eta\right) = 0$, себебі бұл жаЄдайда $cov\left(\xi,\eta\right) = 0$.

Коши-Буняковский теңсіздігі бойынша:

$$\left|cov\left(\xi,\eta\right)\right| = \left|\mathrm{M}\left(\xi - \mathrm{M}\xi\right)\left(\eta - \mathrm{M}\eta\right)\right| \le \mathrm{M}\left|\left(\xi - \mathrm{M}\xi\right)\left(\eta - \mathrm{M}\eta\right)\right| \le$$

$$\le \sqrt{M\left(\xi - M\xi\right)^2}\cdot\sqrt{M\left(\eta - M\eta\right)^2} = \sqrt{D\xi}\cdot\sqrt{D\eta}$$

Бұдан әруақытта $\left|\rho\left(\xi,\eta\right)\right| \le 1$ болатындығы шығады.

Егер $P\left\{\xi = a\eta + b\right\} = 1$ болса, мұндағы $a \neq 0,\ b$-тұрақты шамалар, онда $\left|\rho\right| = 1$ және керісінше, егер $\left|\rho\right| = 1$ болса, онда кездейсоқ шамалар бірге тең ықтималдықпен (ақиқат дерлік) сызықтық байланыста болатындығын көрсетелік.

Шынында да, егер $\xi = a\eta + b$ (а.д.) болса, онда $D\xi = D\left(a\eta + b\right) = a^2 D\eta$ (Еске түсірелік: егер $\xi_1 = \xi_2$ (а.д.) болса, онда $M\xi_1 = M\xi_2$, демек $\xi_1 - M\xi_1 = \xi_2 - M\xi_2\quad (а.д.)$. Бұдан $D\xi_1 = \mathrm{M}\left(\xi_1 - \mathrm{M}\,\xi_1\right)^2 = \;= \mathrm{M}\left(\xi_2 - \mathrm{M}\,\xi_2\right)^2 = D\xi_2$).
Сонымен бірге былай жаза аламыз:

$$cov(\xi,\eta) = cov(a\eta + b,\eta) = M\eta\left(a\eta + b\right) - M\eta\cdot M\left(a\eta + b\right) =$$

$$= aM\eta^2 + bM\eta - a\left(M\eta\right)^2 - bM\eta = a\left[M\eta^2 - \left(M\eta\right)^2\right] = aD\eta$$

Демек

$$\rho = \rho\left(\xi,\eta\right) = \frac{aD\eta}{\sqrt{D\eta}\cdot\sqrt{a^2 D\eta}} = \frac{a}{|a|} = \pm 1,\ \text{яЄни } \left|\rho\right| = 1.$$

Керісінше, айталық $\left|\rho\right| = 1$ болсын. Мынадай белгілеулер енгізелік (бізде $D\xi > 0,\quad D\eta > 0$):

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\ ,\ \tilde{\eta} = \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}\ .$$

Онда $M\tilde{\xi} = M\tilde{\eta} = 0$, $D\tilde{\xi} = D\tilde{\eta} = 1$ болғандықтан

$$D\left(\tilde{\xi} \pm \tilde{\eta}\right) = D\tilde{\xi} + D\tilde{\eta} \pm 2\rho(\xi, \eta) = 2(1 \pm \rho)$$

Бұдан дисперсияның қасиеті бойынша, егер $\rho = -1$ болса $\tilde{\xi} + \tilde{\eta} = 0$ (а.д.), ал $\rho = 1$ болса $\tilde{\xi} - \tilde{\eta} = 0$ (а.д.). Соңғы екі қатынас мыналарға эквивалентті:

егер $\rho = 1$ болса, онда $\xi = a\eta + b_1$ (а.д.)

егер $\rho = -1$ болса, онда $\xi = -a\eta + b_2$ (а.д.)

мұндағы $a = \sqrt{\dfrac{D\xi}{D\eta}} > 0, \quad b_1 = \mathrm{M}\xi - a \cdot \mathrm{M}\eta, \quad b_2 = \mathrm{M}\xi + a \cdot \mathrm{M}\eta$

Корреляция коэффициентінің жоғарыда дәлелденген қасиеттерін жинақтап, теорема түрінде жазалық.

Теорема. 1. Егер ξ, η тәуелсіз кездейсоқ шамалар болса, онда олардың корреляция коэффициенті н-лге тең: $\rho = \rho(\xi, \eta) = 0$

2. Әруақытта $|\rho| \le 1$.

3. $|\ \rho(\xi, \eta)\ | = 1$ сонда тек сонда ғана, егер қандай да бір $a \ne 0, b$ -тұрақтылары табылса және $P\{\xi = a\eta + b\} = 1$ болса (яғни $\xi = a\eta + b$ (а.д) болса). ♦

Егер $\rho > 0$ болса ξ, η кездейсоқ шамалары *оң корреляцияланған,* ал $\rho < 0$ болса *теріс корреляцияланған* кездейсоқ шамалар деп аталады.

Сонымен $\rho = \rho(\xi, \eta)$ корреляция коэффициентін берілген ξ және η кездейсоқ шамаларының тәуелділік -лшемі ретінде қарастыруға болады екен: егер олар тәуелсіз болса, онда $\rho = 0$; егер $\rho = \pm 1$ болса, онда кездейсоқ шамалар бір-біріне сызықты тәуелді (ақиқат дерлік түрде) және де $\rho = 1$ болса η ξ -мен бірге монотонды өседі, $\rho = -1$ болса η ξ -мен бірге монотонды кемиді.

Енді дисперсияны есептеудің бірнеше мысалдарын келтірелік.

Мысалдар

1) ξ -бернуллилік кездейсоқ шама болсын ($\xi \sim Bi(1, p)$):

$\mathrm{P}\{\xi = 1\} = p$, $\mathrm{P}\{\xi = 0\} = 1 - p = q$. Онда

$$\mathrm{M}\xi^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p, \ \mathrm{M}\xi = p$$

Бұдан

$$D\xi = \mathrm{M}\xi^2 - (\mathrm{M}\xi)^2 = p^2 - p = p(1 - p) = pq$$

2) $\xi = I_A(\omega), A \in \mathsf{F}$ Онда $\mathrm{M}\xi = \mathrm{M}I_A = P(A)$

$$\mathrm{M}\xi^2 = 1^2 \cdot P(A) + 0^2 \cdot \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = P(A),$$

$$D\xi = P(A) - (\mathrm{P}(A))^2 = P(A)(1 - P(A))$$

3) $\xi \sim Bi(n, p)$ болсын. $D\xi$ – есептеу үшін (22) формуланы пайдаланалық. Алдымен екінші моментін есептелік:

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left[k(k-1)+k\right] \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)! \cdot (n-1) \cdot n}{(k-2)! \cdot ((n-2)-(k-2))!} \cdot p^2 \cdot p^{k-2} \cdot q^{n-2-(k-2)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)! \cdot n}{(k-1)! \cdot ((n-1)-(k-1))!} \cdot p \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-1-(k-1)} =$$

$$= (n-1)np^2 \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} \cdot p^{k-2} \cdot q^{n-2-(k-2)} + np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-1-(k-1)} =$$

$$= (n-1)np^2 (p+q)^{n-2} + np(p+q)^{n-1} = (n-1)np^2 + np = n^2 p^2 - np^2 + np$$

Біз жоғарыда алдымен k^2-ты $k^2 = k(k-1)+k$ түрінде жаздық (себебі бұлай жазу кейін терулерді $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ түрінде жазғанда факториалдарды қысқарту үшін қолайлы), сосын жаңа коэфициенттерді тағы да биномдық коэффициенттер түрінде жаздық та, Ньютон биномының формуласын (еске түсірелік: $(a+b)^m = \sum_{l=0}^{m} C_m^l a^l b^{m-l}$) $p+q=1$ қосындысы үшін пайдаландық.

Енді $\xi \sim Bi(n,p)$ үшін $M\xi = np$ екенін еске алсақ (2.1 пункт, 3-мысал), онда

$$D\xi = n^2 p^2 - np^2 + np - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p) = npq$$

Сонымен, $\xi \sim Bi(n,p)$ үшін $D\xi = npq$

Ескерту. Іс жүзінде біз жоғарыда $M\xi^2$ есептеу үшін оны басқаша былай түрде жаздық

$$M\xi^2 = M\xi(\xi-1) + M\xi \qquad (27)$$

Бұл әдісті кейін де көп қолданатын боламыз.

(22) формула мен (27) формуладан дисперсияны есептеудің тағы бір формуласын аламыз:

$$D\xi = M\xi(\xi-1) + M\xi - M\xi^2 \qquad (28)$$

4) $\xi \sim \Pi(\lambda)$, яғни ξ параметрі $\lambda > 0$ пуассондық кездейсоқ шама болсын. Онда $M\xi = \lambda$ (1.1 пункттегі 5-мысал). $D\xi$ есептеу үшін бізге (28) формуланы қолданған қолайлы.

$$M\xi(\xi-1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2$$

Демек

$$D\xi = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Сонымен $\xi \sim \Pi(\lambda)$ үшін $D\xi = \lambda$

5) ξ -параметрі p -ға тең геометриялық кездейсоқ шама.

Онда $M\xi = \frac{1}{p}$ (2.1.пункттегі 6-мысал)

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p = p\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} p$$

Соңғы қосынды $\frac{1}{p}$-ға тең (2.1 пунктті қараңыз). Бірінші қосындыны былай жазалық:

$$p\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} = pq\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = pq\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)''_{qq}$$

Біз соңғы q-бойынша 2-ретті туындыны жазған кезде дәрежелік $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ қатарын $0 < q < 1$ аралығында қанша рет қажет болса, сонша рет мүшелеп дифференциялдауға болатындығын пайдаландық. $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$. болғандықтан:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)'_q = \frac{1}{(1-q)^2} \quad ; \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)''_{qq} = \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p^3}$$

Сонымен

$$M\xi^2 = pq\cdot\frac{2}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}$$

Демек

$$D\xi = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q + p - 1}{p^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Қортынды: *егер ξ параметрі p-ға тең геометриялық кездейсоқ шама болса, онда* $D\xi = \frac{1-p}{p^2}$

6) *Кездейсоқ санды кездейсоқ шамалардың қосындысының дисперциясы.* $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, ν және S_ν кездейсоқ шамаларын 2.1 пункттегі 8-мысалдағыдай етіп алалық. Қосымша ξ_i-лердің дисперсиялары бар және олар бірдей $\left(D\xi_i = \sigma^2\right)$ деп есептелік. Онда 1.1 пункттегідей

$$S_\nu = \sum_{k=1}^{n} S_k \cdot I_{\{\nu=k\}}$$

Бұдан

$$S_\nu^{\,2} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} S_k S_l \cdot I_{\{\nu=k\}} \cdot I_{\{\nu=l\}} = \sum_{k=1}^{n} S_k^{\,2} \cdot I_{\{\nu=k\}}$$

болатындығы шығады, себебі $k \neq l$ болса $I_{\{\nu=k\}} \cdot I_{\{\nu=l\}} = 0$. Енді әңгіме $\mathrm{M}S_\nu{}^2$ есептеуге келіп тірелді. $S_k{}^2$ пен ν тәуелсіз кездейсоқ шамалар болғандықтан математикалық кЇтімнің сызықтық және мультипликативтік қасиеттері бойынша алдыңғы қатынастан мынаны аламыз

$$\mathrm{M}S_\nu{}^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}S_k{}^2 \cdot P\{\nu = k\} \qquad (29)$$

$\mathrm{M}S_k{}^2$ есептелік. Егер $\mathrm{M}\xi_j = a,\ D\xi_j = \sigma^2 = \mathrm{M}\xi_j{}^2 - a^2$ екенін және $j \neq l$ болғанда ξ_j мен ξ_l тәуелсіз болатынын еске алсақ:

$$\mathrm{M}S_k{}^2 = \sum_{j,l=1}^{k} \mathrm{M}\xi_j\xi_l = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{M}\xi_j{}^2 + k(k-1)a^2 = k(\sigma^2 + a^2) + k(k-1)a^2$$

Осы мәнді жоғарыдағы $\mathrm{M}S_\nu{}^2$ үшін алған (29) қатынасқа қойсақ

$$\mathrm{M}S_\nu{}^2 = \left(\sigma^2 + a^2\right)\mathrm{M}\nu + a^2\sum_{k=1}^{n} k(k-1)P\{\nu = k\} =$$

$$= \left(\sigma^2 + a^2\right)\mathrm{M}\nu + a^2\left(D\nu - \mathrm{M}\nu + (\mathrm{M}\nu)^2\right) = \sigma^2\mathrm{M}\nu + a^2 D\nu + a^2(\mathrm{M}\nu)^2$$

Ендеше ($MS_\nu = a\mathrm{M}\nu$ болатындықтан)

$$DS_\nu = \sigma^2\mathrm{M}\nu + a^2 D\nu \qquad (30)$$

9) *Гипергеометриялық үлестірім.* Құтыда m қара, $n - m$ ақ, барлығы n шар бар. Құтыдан кездейсоқ түрде r шар алынған. ξ -осы алынған r шардың ішіндегі қара шарлардың саны. Онда $\xi - 0,1,2,\ldots,\min(m,r)$ мәндерін қабылдайтын кездейсоқ шама. Осы шаманың дисперсиясын есептелік.

1-әдіс. Алдымен дисперсияны тікелей анықтама бойынша кездейсоқ ξ шамасысының Їлестірім заңын пайдаланып есептелік. Бізде (І-тарау §3, п.3.3)

$$P\{\xi = k\} = \frac{C_m^k C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r} \qquad (k = 0,1,2,\ldots,m)$$

Жоғарыда біз егер $l < 0$ немесе $l > n$ болса, $C_n^l = 0$ болатынын ескеріп ξ -дің мәнін 0-ден m-ге дейін (тек $\min(r,m)$ емес) өзгеруі мүмкін деп есептедік. Соңғы формуладан ($P\{\xi = k\}$ ықтималдықтық үлестірім заңы болғандықтан) мынандай қатынас шығатынын атай кетелік

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k C_{n-m}^{r-k} = C_n^r \qquad (31)$$

Анықтама бойынша

$$\mathrm{M}\xi = \sum_{k=0}^{m} k \cdot \frac{C_m^k C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r}$$

Қосынды ішіндегі C_m^k-ны $\dfrac{m!}{k!(m-k)!}$ түрінде жазып, сәйкес қысқартуларды орындасақ мынаны аламыз

$$\mathrm{M}\,\xi = \left(C_n^r\right)^{-1} \cdot m \cdot \sum_{k=1}^{m} C_{m-1}^{k-1} C_{n-1-(m-1)}^{r-1-(k-1)} = \frac{m}{C_n^r} \cdot C_{n-1}^{r-1} = \frac{m \cdot r}{n}$$

Біз жоғарыда ортаңғы қосындыны (31) формула арқылы C_{n-1}^{r-1} түрінде жаздық. Енді $\mathrm{M}\,\xi(\xi-1)$ есептелік:

$$\mathrm{M}\,\xi(\xi-1) = \left(C_n^r\right)^{-1} \sum_{k=1}^{m} k(k-1) C_m^k C_{n-m}^{r-k} = \frac{m(m-1)}{C_n^r} \cdot C_{n-2}^{r-2} = \frac{rm(m-1)(r-1)}{n(n-1)}$$

Бұдан

$$D\xi = \frac{rm(m-1)(r-1)}{n(n-1)} + \frac{mr}{n} - \frac{m^2 r^2}{n^2} = \frac{rm}{n}\left(1 - \frac{m}{n}\right)\left(1 - \frac{r-1}{n-1}\right)$$